ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КРОССОВОК*

ВИНОКУРОВ В.А.

1 К постановке задачи

В последние годы обувь для спортивной ходьбы и бега завоевала широчайшее распространение среди всех слоев населения, особенно среди молодежи. Разумеется этому явлению дали начало разнообразные причины: широкая реклама изделий данного типа, невысокая цена изделий среднего качества, необычный "научно- фантастический"внешний вид, использование новых конструкционных материалов, высокие функциональные свойства. При этом основой компании по широкому завоеванию рынка обуви кроссовками стали их высокие динамические свойства. Они доставляют удовольствие при ходьбе и беге, как бы подбрасывая спортсмена при шаге вперед и мягко принимая ногу при постановке ступни на землю. Непременным атрибутом кроссовок стала толстая, заметно деформируемая при ходьбе подошва, которая далее нашла применение и в "неспортивной"обуви, в частности, в пляжных тапочках. Толстая подошва, как мы покажем, не просто элемент внешнего оформления и атрибутики, а ключевой функциональный элемент, дающий основное их свойство - возврат энергии, запасенной при упругой деформации подошвы, в такт с движением спортсмена. Какие же должны быть упругие свойства и конструкция подошвы, чтобы в оптимальной степени принимать и отдавать энергию при движении в такт со спортсменом, чтобы доставлять удовольствие при ходьбе, пружиня и подбрасывая хозяина? Численный расчет оптимальных конструкционных свойств подошвы и характеристик ее материала в зависимости от параметров движения спортсмена и является предметом настоящего исследования. Поскольку нас интересуют именно причины широкого распространения кроссовок среди всех слоев населения, то "спортсмен"далее условный термин для лица, носящего кроссовки. Кроме того, мы не обсуждаем гигиенические качества, износоустойчивость, водостойкость и многие другие потребительские качества кроссовок, а ограничиваемся лишь изучением их функционально-динамических свойств.

В данной работе проблема создания кроссовок с оптимальными динамическими свойствами решается путем исследования следующих частных вопросов в следующем порядке:

1. Расчет требуемых характеристик упругих свойств кроссовок для ходьбы и бега, исходя из временных параметров ходьбы и бега и характеристик спортсмена.

2. Расчет упругих параметров кроссовок, обеспечивающих требуемые динамические характеристики, в модели линейной упругости.

3. Расчет упругих параметров кроссовок, обеспечивающих требуемые динамические характеристики, в модели нелинейной упругости.

4. Выбор материалов подошвы, обеспечивающих заданные упругие характеристики.

5. Выбор конструкции подошвы, обеспечивающей заданные упругие характеристики.

2 Основные понятия модели

Спортсмена мы характеризуем двумя физическими параметрами: временем шага - τ, измеряемым в секундах и принимающим наименьшее значение $\tau = 0,1$ с при беге и наибольшее значение при ходьбе $\tau = 0,6$ с, т.е. $\tau \in [0,1; 0,6]$ с ; и массой спортсмена m , принимающей значения в интервале от 30 кг до 90 кг, т.е. $m \in [30; 90]$ кг, при стандартном значении $m_c = 75$ кг. Упругие свойства кроссовок мы характеризуем: величиной максимальной деформации подошвы под давлением ноги спортсмена a , принимающей значения от 0 до 2 см, a ([0; 2] см при стандартном значении a = 1 см; величиной запасенной упругой энергии U; величиной силы ((x) как функции деформации x; мгновенным коэффициентом упругости $k(x) = \frac{df(x)}{dx}$

В модели линейной упругости $k(x) = const = k$ – называется упругой константой. Выбранный материал подошвы характеризуется в случае линейной упругости модулем Юнга E, а в общем случае материалы и конструкция характеризуются также зависимостью $F(x)$ силы от величины деформации x и коэффициентом упругости $k(x)$.

3 Определение требуемых динамических свойств кроссовок через параметры движения спортсмена

3.1

В модели линейной упругости упругой константой k называется отношение

$$\frac{f(x)}{x} = k \tag{1}$$

величины силы f к величине упругой деформации x. При ходьбе сила действия на подошву равна в максимальном значении весу спортсмена $F = mg$, а при беге может увеличиваться $F = \alpha mg$, где коэффициент $\alpha \in [1; 2]$. Здесь g - ускорение свободного падения. Допуская деформацию $a = 1$ см, мы получаем для упругой константы при ходьбе минимальное значение для спортсмена стандартной массы $m_c = 75\,\text{кг}$

$$k_{min} = \frac{75 * 10}{0.01}\text{Н/м} = 7.5 \cdot 10^4\,\text{Н/м}. \tag{2}$$

В общем случае неравенство для величины деформации

$$x \leq a \tag{3}$$

влечет неравенство для упругой константы

$$k \geq \frac{mg}{a}. \tag{4}$$

3.2

В модели линейной упругости (при принятии закона Гука) запасенная упругая энергия равна

$$u = \frac{kx^2}{2}. \tag{5}$$

Таким образом в момент максимальной деформации при ходьбе

$$u = \frac{kx^2}{2} = \frac{mgx}{2}$$

и ее максимальное значение

$$u_{max} = \frac{mga}{2}. \tag{6}$$

Итак, запасенная упругая энергия пропорциональна величине деформации a, что объясняет необходимость толстой деформируемой подошвы кроссовок. При деформации $a = 1$ см для стандартного спортсмена запасенная энергия

$$u = \frac{75 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{2} = 7.5\text{Дж}. \tag{7}$$

При ходьбе сила, действующая на подошву, не превосходит веса спортсмена, поэтому работа A этой силы при максимальной деформации a не превосходит величины

$$A \leq mga. \tag{8}$$

Таким образом при любых свойствах подошвы, линейном или нелинейном законе упругости верхняя граница запасенной кроссовкой энергии за 1 шаг есть

$$U = mga. \tag{9}$$

Итак, при нелинейном законе упругости величина запасенной упругой энергии может быть увеличена не более, чем в 2 раза по сравнению со случаем (6) линейного закона.

3.3

Перейдем к рассмотрению динамики шага.

Время шага τ принимает значение от $\tau = 0,1$ с при быстром беге до $\tau = 0,6$ с при медленной ходьбе. Время одного шага соответствует половине периода действия силы деформации на подошву (недеформированное состояние – сжатие до максимальной деформации – расширение до недеформированного состояния). Итак, условие динамического соответствия упругих свойств подошвы шагу запишем в виде

$$\frac{T}{2} = \tau, \tag{10}$$

т.е. в виде равенства половины периода собственных упругих колебаний времени шага.

В случае линейной упругости период собственных колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{11}$$

где k - упругая константа подошвы, и условие резонанса (10) принимает вид

$$\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \tau. \tag{12}$$

Выражая константу k через максимальную деформацию a по формуле вида

$$\frac{mg}{a} = k, \tag{13}$$

получаем из условия (12) условие

$$\pi\sqrt{\frac{ma}{mg}} = \tau$$

или

$$\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = \tau. \tag{14}$$

Отсюда

$$a = g\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2 \tag{15}$$

условие, эквивалентное условию резонанса (10). Принимая ускорение свободного падения $g = 9,8$м/с^2 для диапазона $\tau \in [0,1; 0,6]$ с , получаем диапазон амплитуды деформаций

$$a(\text{м}) = \frac{g}{\pi^2}\tau^2 = \frac{9.8}{\pi^2}\tau^2(\text{с}) \simeq \tau^2(\text{с}) \tag{16}$$

т.е. $a = 1 \div 36$ см. В частности, для $\tau = 0,5$ с получаем $a = 25$ см, что нереализуемо в обычной обуви. Для быстрого бега $a = 1$ см, что может быть реализовано в кроссовках с толщиной подошвы более 1 см. Упругая константа должна определяться из условия (12), т.е.

$$k = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 m \tag{17}$$

для $\tau = 0,1$ с при стандартной массе $m = 75$ кг

$$k_{0.1} = 10^2\pi^2 75\,\text{Н/м} = 7.4\cdot 10^4\,\text{Н/м}.$$

Для $\tau = 0,5$ с при той же массе

$$k_{0.5} = \frac{10^2\cdot\pi^2\cdot 75}{25}\,\text{Н/м} = 2.96\cdot 10^3\,\text{Н/м}.$$

Для $\tau = 0,6$ с и той же массе

$$k = \frac{k_{0.1}}{36} = 2060\,\text{Н/м}.$$

Итак, в модели линейной упругости упругая константа должна лежать в диапазоне

$$k = 7.4\cdot 10^4\,\text{Н/м}\cdot\left(1 \div \frac{1}{36}\right). \tag{18}$$

4 Выбор материала подошвы в линейной модели

Рассмотрим вопрос о выборе материала подошвы, обеспечивающего необходимый коэффициент упругости k .

Случай опоры на пятку из однородного материала. Предположим, что весь вес приходится на пятку и что подошва под пяткой сделана из одного слоя однородного упругого материала с модулем Юнга E. Тогда в момент максимальной деформации при ходьбе вес тела равен силе упругой деформации, т.е.

$$mg = ES\frac{a}{h}, \tag{19}$$

где m - масса спортсмена , g - ускорение свободного падения, h - высота слоя упругого материала, S - площадь пятки. Согласно (19) упругая константа

$$k = \frac{mg}{a}, \tag{20}$$

что является условием на величину деформации a , с другой стороны

$$k = \frac{ES}{h}, \tag{21}$$

что является условием на модуль Юнга E материала. Для стандартного спортсмена $m = 75$ кг, полагаем пятку - кругом радиуса $r = 3$ см. Тогда для бега ($\tau = 0,1$ с), $k = 7.4 \cdot 10^4$ Н/м и при высоте подошвы $h = 2$ см. Из (21) следует

$$E = \frac{kh}{S}. \tag{22}$$

И в случае бега стандартного спортсмена

$$E = \frac{7.4 \cdot 10^4 2 \cdot 10^{-2}}{\pi * 3^2 * (10^{-2})^2}\,\text{Па} = 0.52 \cdot 10^6\,\text{Па} = 0.5\,\text{МПа}.$$

Поэтому для стандартного спортсмена требуется материал с модулем Юнга

$$E \leq 0.5\,\text{МПа}.$$

Для полиуретана модуль Юнга равен

$$E = 10\text{МПа}.$$

5 Расчет упругих свойств в модели нелинейной упругости

5.1

Здесь мы рассмотрим упругую модель подошвы, деформирующейся по нелинейному закону, т.е. сила реакций деформации предполагается связанной с длиной деформации x законом

$$f = f(x), \tag{23}$$

где функция $f()$, вообще говоря, не предполагается линейной. Но предполагается, что $f(x)$ монотонно возрастающая функция x , на отрезке $[0;a]$, принимающая наибольшее значение $F = f(a)$ в точке a. Нас интересует вопрос: насколько переход от линейной модели упругости с

$$f(x) = kx \tag{24}$$

к общей нелинейной модели позволит улучшить основные параметры кроссовки:

1) величину запасенной упругой энергии U ,

2) величину максимальной деформации a,

3) полупериод колебаний $\frac{T}{2}$.

Более точно, задача заключается в том, чтобы при заданной максимальной деформации a максимизировать величину запасенной энергии U и период колебаний Т.

В линейной модели при заданном a имеем

$$U = \frac{1}{2}mga, \tag{25}$$

$$\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}. \tag{26}$$

В общем случае для запасенной энергии верно неравенство

$$U \leq mga. \tag{27}$$

Ответим теперь на следующие вопросы:

1) При фиксированной величине a выбрать функцию $f(x)$ так, чтобы период Т был максимальным.

2) При фиксированной величине a и фиксированной величине U, удовлетворяющей неравенству (27), выбрать закон упругости $f(x)$ так, чтобы период Т был максимален.

Для ответов на поставленные вопросы воспользуемся законом сохранения энергии консервативной системы

$$\frac{mv^2}{2} + u(x) = const, \tag{28}$$

где

$$u(x) = \int_0^x f(x)dx. \tag{29}$$

Тогда в момент максимальной деформации $x = a$ скорость $v = 0$, $f(a) = F = mg$ и поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = u(a) - u(x). \tag{30}$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2(u(a) - u(x))}{m}}$$

и

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(u(a)-u(x))}{m}}}.$$

Откуда

$$\frac{T}{2} = 2\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(u(a)-u(x))}}. \tag{31}$$

5.2

Для рассмотрения первого вопроса заметим, что

$$0 \le u(a) - u(x) \le u(a) \tag{32}$$

в силу условия $f(x) \ge 0$, поэтому

$$\frac{T}{2} \ge 2\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{2u(a)}{m}}} = \frac{2a}{\sqrt{\frac{2u(a)}{m}}} = \frac{\sqrt{2m}a}{\sqrt{u(a)}}.$$

Положим при данном $\epsilon \in]0, a[$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le a-\epsilon; \\ \frac{1}{\epsilon}(x-(a-\epsilon))F, & x \in [a-\epsilon, a]. \end{cases}$$

Тогда

$$u(a) = \int_0^a f(x)dx = \frac{1}{2}\epsilon F = \frac{1}{2}\epsilon mg.$$

Устремляя параметр ϵ к нулю, мы получаем сколь угодно большое значение периода.

Итак, в первом вопросе период T может быть сделан сколь угодно большим, но при этом запасенная энергия $u(a)$ делается сколь угодно малой, что не представляет практического интереса.

5.3

Перейдем к рассмотрению второго вопроса.

В условиях второго вопроса $u(x)$ – выпуклая вниз функция на отрезке $[0, a]$, принимающая значениz $u(0) = 0$ и $u(a) = U$. Причем значение ее производной неотрицательно и в точке $x = a$, $u'(a) = F = mg$.

Итак, выпуклая вниз функция $u(x)$ лежит между линейной функцией $u_h(x)$, график которой проходит через точки $(0, 0)$ и (a, U) и ломаной $u_l(x)$, график которой состоит из отрезка $[0, b]$ ($b = a - U/mg$), оси x и отрезка, соединяющего точки $(b, 0)$ и (a, U). Из неравенств

$$u_l(x) \le u(x) \le u_h(x)$$

следует

$$u(a) - u_l(x) \ge u(a) - u(x) \ge u(a) - u_h(x)$$

и

$$\sqrt{u(a)-u_l(x)} \geq \sqrt{u(a)-u(x)} \geq \sqrt{u(a)-u_h(x)}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{u(a)-u_l(x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{u(a)-u(x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{u(a)-u_h(x)}}$$

и

$$\sqrt{2m}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{u(a)-u_l(x)}} \leq \sqrt{2m}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{u(a)-u(x)}} \leq \sqrt{2m}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{u(a)-u_h(x)}}. \quad (33)$$

Наибольшее значение полупериода получается, когда

$$u(x) = u_h(x) = \frac{U}{a}x \quad (34)$$

и равно

$$\frac{T}{2} = \sqrt{2m}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{U(1-\frac{x}{a})}} = \frac{\sqrt{2ma}}{\sqrt{U}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-t}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{U}}a.$$

т.е.

$$\frac{T_{max}}{2} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{U}}a. \quad (35)$$

Положим

$$U = \beta m g a, \quad (36)$$

где $\beta \in [0,1]$ и $\beta = 1/2$ – линейно упругий случай, $\beta = 1$ – случай максимальной энергии. Тогда

$$\frac{T_{max}}{2} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{\beta g}}. \quad (37)$$

Из соотношения (15) следует неравенство

$$\frac{T}{2} \leq 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (38)$$

для любой консервативной системы.

При $\beta = 1/2$ получаем

$$\frac{T}{2} \leq 4\sqrt{\frac{a}{g}}, \quad (39)$$

а для линейной упругой системы с теми же β и a

$$\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}. \quad (40)$$

Неравенство (38) показывает, что существенный выигрыш в величине периода при переходе к нелинейной упругой системе может быть достигнут лишь за счет уменьшения параметра β – нормированной величины запасенной энергии до значений существенно меньше единицы, что практически неприемлемо.

6 Использование упругих свойств воздуха

Рассмотрим вопрос о применении воздуха для получения упругой конструкции подошвы с нужным коэффициентом упругости k.

Рассмотрим цилиндр высоты h с площадью сечения S, нижний торец которого заделан, а верхний занят скользящим под действием нагрузки поршнем. Сила, действующая на поршень

$$f = (p - p_0)S, \tag{41}$$

где p_0 – внешнее атмосферное давление, p - давление воздуха в цилиндре. Пусть x – смещение поршня от положения равновесия, тогда объем воздуха в поршне:

$$V = S(h - x). \tag{42}$$

При адиабатическом процессе сжатия воздуха

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma, \tag{43}$$

где p_0 – атмосферное давление, $V_0 = S * h$. Итак,

$$p = p_0 \left(\frac{h}{h-x}\right)^\gamma = p_0 \left(\frac{1}{1-\frac{x}{h}}\right)^\gamma = p_0 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{-\gamma}. \tag{44}$$

Здесь

$$\gamma = 1.4 \tag{45}$$

показатель адиабаты для воздуха. Для возвращающей силы f как функции смещения x получаем

$$f(x) = p_0 S \left(\left(1 - \frac{x}{h}\right)^{-\gamma} - 1\right). \tag{46}$$

В частности, при $(x/h) << 1$ получаем линейный закон

$$f(x) = \gamma \frac{p_0 S}{h} x \tag{47}$$

с

$$k = \gamma \frac{p_0 S}{h}. \tag{48}$$

Считаем теперь по формуле (48) упругую константу, предполагая, что воздушный цилиндр высотой $h = 2$ см, находится непосредственно под пяткой спортсмена. Тогда

$$k = 1.4 \frac{10^5 \cdot \pi \cdot 0.03^2}{0.02} \text{ Н/м} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н/м}. \tag{49}$$

Последние значение лежит в диапазоне, требуемом формулой (18). За счет изменения параметров S и h могут быть достигнуты значения коэффициента упругости, требуемые формулой (18).

7 выводы и рекомендации

Упругие свойства подошвы кроссовок определяют динамические характеристики кроссовок – способность запасать и отдавать упругую энергию в такт движению спортсмена. Величина запасенной упругой энергии U определяется линейной величиной максимальной деформации подошвы a и в линейной модели дается формулой

$$U = \frac{1}{2}mga, \tag{50}$$

где m - масса спортсмена, g - ускорение свободного падения. Таким образом, первое требование к подошвам кроссовок – достижение максимальной величины линейной деформации a, что влечет увеличение толщины подошвы.

Динамика бега и ходьбы в кроссовках оптимизируется при совпадении полупериода упругих колебаний системы подошва – спортсмен $\frac{T}{2}$ со временем шага спортсмена τ. Для быстрого бега такое совпадение требует величины максимальной деформации подошвы $a = 1$ см и в качестве материала – микропористый материал, использующий упругие свойства воздуха.

Оптимизация динамических характеристик ходьбы – более сложная задача, ибо требует величин максимальных деформаций a до 36 см, что влечет необычные конструкции подошвы.